TEMA 4

INTEGRACIÓN EN EL CAMPO COMPLEJO: TEORÍA DE CAUCHY

1. Curvas en $\mathbb{C}$

1.1 Curvas suaves

Definición. $\gamma \subset \mathbb{C}$ es una **curva** si es la imagen de una función continua $z : [a, b] \to \mathbb{C}$. La función z se llama **parametrización** de γ.

Observación: Existen infinitas parametrizaciones de γ: si $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ parametrización de γ y $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ biyección continua $\Longrightarrow \tilde{z} = z \circ \varphi$ parametrización de γ.

Definición. (E. B. Saff, A. D. Snider) $\gamma \subset \mathbb{C}$ es una **curva suave** si es la imagen de una función $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ que cumple:

1. $\exists z'$ y es continua en $[a, b]$ (en los extremos se consideran las derivadas laterales).

2. $z'(t) \neq 0 \ \forall t \in [a, b]$.

3. (i) z inyectiva en $[a, b]$ ó (ii) z inyectiva en $[a, b)$ siendo $z(a) = z(b)$ y $z'(a) = z'(b)$.

Si 1+2+3(i)$\Rightarrow \gamma$ se llama **arco suave**; 1+2+3(ii)$\Rightarrow \gamma$ se llama **curva suave cerrada**.

Ejemplo 1. Son curvas suaves en $\mathbb{C}$:

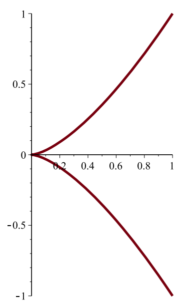
a) El segmento $[z_1, z_2]$ que une $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

b) La circunferencia de centro $z_0 \in \mathbb{C}$ y radio $R > 0$.

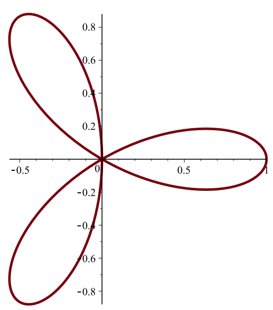
c) $G(f) = \{x + iy : y = f(x)\}$ donde $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ es una función real.

Observación: Queda garantizada la existencia de recta tangente en cada punto de γ ("suavidad") exigiendo las propiedades 1,2 y 3 de la definición, sin embargo:

- No se puede prescindir de 2. Por ejemplo, γ dada por $z(t) = t^2 + it^3$ con $t \in [-1, 1]$ no tiene recta tangente en $z_0 = 0$ y z cumple 1 y 3. Aunque existe $z'(0)$ se tiene que $z'(0) = 0$ y se puede probar que ninguna parametrización cumple 2. z_0 es punto cuspidal o de retroceso.
- No se puede prescindir de 3. Por ejemplo, la rosa polar de 3 pétalos no tiene recta tangente en $z_0 = 0$ y la parametrización $z(t) = \cos(3t) \cdot e^{it}$, $t \in [0, \pi]$, cumple 1 y 2, pero z no es inyectiva pues $z(\pi/6) = z(\pi/2) = z(5\pi/6) = z_0$. z_0 es un punto múltiple.



a) Punto de retroceso



b) Rosa polar de 3 pétalos

Parametrización admisible de una curva suave

Observación: No todas las parametrizaciones de una curva suave verifican las propiedades 1,2 y 3 de la definición. Por ejemplo:

- La gráfica de $f(x) = x^2$ con $x \in [-1, 1]$ es curva suave y $z(t) = t^3 + it^6$, $t \in [-1, 1]$ no cumple 2 pues $z'(0) = 0$.
- $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$ es curva suave y $z(t) = z_0 + Re^{i2t}$, $t \in [0, 2\pi]$, no cumple 3.

Definición. Si $\gamma \subset \mathbb{C}$ curva suave, $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ es una **parametrización admisible** (en adelante, p.a.) si verifica la propiedades 1,2 y 3 de la definición de curva suave.

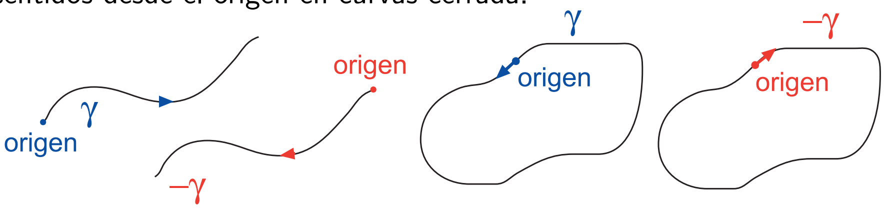
Dirección u orientación de una curva suave

Si $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ es una p.a. de una curva suave γ, se define la relación $\prec$: Dados $z_1, z_2 \in \gamma$, $z_1 \prec z_2$ (y se lee z_1 precede a z_2), si $z_1 = z(t_1)$ y $z_2 = z(t_2)$ siendo $t_1, t_2 \in [a, b)$ tales que $t_1 < t_2$; además, si $z(a) \neq z(b)$ entonces $z \prec z(b) \, \forall z \in \gamma \setminus \{z(b)\}$.

- $\prec$ es una relación de orden total en γ y se dice que γ es una **curva suave dirigida**. En el caso $z(a) = z(b)$ también se dice que γ es **orientada**.
- **$z(a)$** es el menor elemento del conjunto ordenado $(\gamma, \prec)$ u **origen** de γ. Si $z(a) \neq z(b)$ entonces **$z(b)$** es el mayor elemento de $(\gamma, \prec)$ o **extremo** de γ.

En una curva suave γ sólo existen dos órdenes totales distintos inducidos por p.a. Si $\prec$ es uno de ellos, el otro su inverso: Dados $v, w \in \gamma$, $z_2 \succ z_1$ (z_2 sucede a z_1) $\iff z_1 \prec z_2$

Si γ es una curva suave dirigida según $\prec$, notaremos $-\gamma$ a la misma curva con la dirección dada por $\succ$. El orden $\prec$ o $\succ$ queda determinado fijando el origen en γ, y uno de los dos posibles sentidos desde el origen en curvas cerrada.



Si γ es una curva suave dirigida y $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ p.a. de γ (aquí y en adelante, p.a. de γ también indica que es coherente con la dirección de γ), entre las p.a. de $-\gamma$ se tienen:

- $z^- : [-b, -a] \to \mathbb{C}$ definida por $z^-(t) = z(-t)$.
- $z_- : [a, b] \to \mathbb{C}$ definida por $z_-(t) = z(a + b - t)$.

Ejemplo 2. Obtención de $-\gamma$ siendo γ:

a) Segmento que une $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

b) Circunferencia de centro $z_0 \in \mathbb{C}$ y radio R orientada en sentido anti-horario (o positivo).

1.2 Contornos

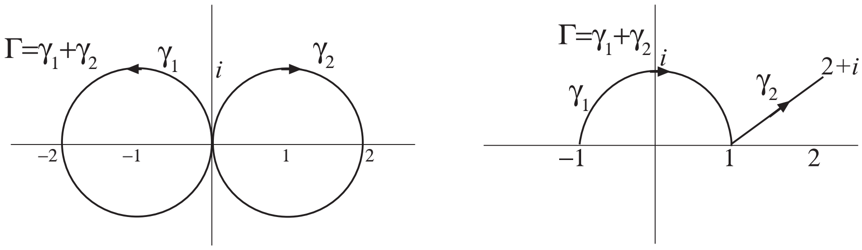
Definición. $\Gamma \subset \mathbb{C}$ es un **contorno** si se reduce a un punto o si es una sucesión finita de curvas suaves dirigidas $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ tales que el extremo de γ_k coincide con el origen de γ_{k+1} $\forall k = 1, \ldots, n-1$. Se denota $\Gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$. Una **parametrización de Γ** es una función continua $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ tal que $\exists t_1, \ldots, t_{n-1} \in [a, b]$ verificando $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ y $z|_{[t_k, t_{k+1}]}$ es una p.a. de γ_k, coherente con su dirección, $\forall k = 1, \ldots, n-1$.

Observación:

- Una curva suave dirigida es un contorno.
- Un contorno puede tener cúspides y puntos múltiples
- Todo contorno es una curva.
- $\Gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$ tiene sentido de recorrido inducido por $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, pero no se puede establecer una relación de orden en Γ si tiene puntos múltiples: $z_0 \in \gamma_k \cap \gamma_j$ puede preceder o suceder a un punto dado según se considere parte de γ_k o de γ_j. El origen o punto inicial de Γ es el origen de γ_1 y el extremo o punto final es el extremo de γ_n.

Definición. $\Gamma \subset \mathbb{C}$ es un **contorno cerrado o lazo** si sus puntos inicial y final coinciden. Γ es un **contorno simple** si existe una parametrización $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ inyectiva en $[a, b)$ (Γ no tiene puntos múltiples).

Ejemplo 3. Parametrización de los contornos de la siguiente figura.

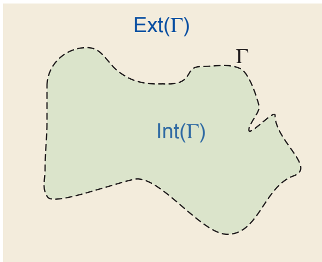


Contorno opuesto y suma de contornos

- Si $\Gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$ el contorno opuesto es el formado por el mismo conjunto Γ recorrido en sentido contrario, esto es,
$$-\Gamma = (-\gamma_n) + (-\gamma_{n-1}) + \cdots + (-\gamma_1).$$
- Sean $\Gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$ y $\hat{\Gamma} = \hat{\gamma}_1 + \cdots + \hat{\gamma}_n$ contornos tales que el punto final de Γ coincide con el inicial de $\hat{\Gamma}$, llamamos contorno suma de Γ y $\hat{\Gamma}$ al contorno
$$\Gamma + \hat{\Gamma} = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n + \hat{\gamma}_1 + \cdots + \hat{\gamma}_n.$$

Teorema (de la curva de Jordan)

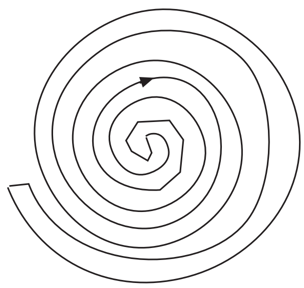
Si $\Gamma \subset \mathbb{C}$ es un contorno simple y cerrado entonces
$$\mathbb{C} \setminus \Gamma = \mathrm{Int}(\Gamma) \cup \mathrm{Ext}(\Gamma),$$
donde $\mathrm{Int}(\Gamma)$ es un dominio acotado y $\mathrm{Ext}(\Gamma)$ es un dominio no acotado verificando
$$\mathrm{Int}(\Gamma) \cap \mathrm{Ext}(\Gamma) = \emptyset \quad \text{y} \quad \mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(\Gamma)) = \mathrm{Fr}(\mathrm{Ext}(\Gamma)).$$



Observación:

- Debido a este resultado un contorno simple y cerrado Γ también se denomina curva de Jordan.
- Si Γ es una curva de Jordan (y en particular si Γ es una curva suave cerrada) Γ está orientada positivamente si $\mathrm{Int}(\Gamma)$ está situado a la izquierda del contorno.

Ejemplo 5. Determinación de la orientación del contorno de la figura.



Longitud de un contorno simple

- Si γ es una curva suave y $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ una p.a. de γ entonces la longitud de γ es
$$Long(\gamma) = \int_a^b |z'(t)| dt.$$
- Si $\Gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$ es un contorno simple entonces su longitud es
$$Long(\Gamma) = \sum_{k=1}^{n} Long(\gamma_k) = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b |z_k'(t)| dt.$$
donde z_k es una p.a. de γ_k $\forall k = 1, \ldots, n$.

Conjuntos y dominios conexos por caminos

Definición. $\Omega \subset \mathbb{C}$ es **conexo por caminos** si $\forall z_1, z_2 \in \Omega$ existe una función continua $z : [a, b] \to \Omega$ tal que $z(a) = z_1$ y $z(b) = z_2$.

Proposición 1. Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto son equivalentes:

1. Ω es conexo.
2. Ω es conexo por poligonales.
3. Ω es conexo por caminos.

2. Integral de contorno

2.1 Integral de funciones sobre curvas suaves

Definición. Si γ curva suave dirigida (según $\prec$) con origen A y extremo B. Una **partición** de γ es un conjunto $\mathcal{P} = \{z_0, z_1, \dots, z_n\} \subset \gamma$ tal que $z_0 = A \prec z_1 \prec \cdots \prec z_n = B$. $\mathbb{P}(\gamma)$ denota el conjunto de todas las particiones de γ. La **norma de la partición** $\mathcal{P}$ es

$$\|\mathcal{P}\| = \max\left\{Long\left(\gamma_{z_{k-1},z_k}\right) : k = 1, \dots, n\right\}$$

donde γ_{z_{k-1},z_k} denota el arco de γ comprendido entre z_{k-1} y z_k.

Definición. Sean γ una curva suave dirigida y $f : \gamma \to \mathbb{C}$ una función.

- Si $\mathcal{P} = \{z_0, z_1, \dots, z_n\} \in \mathbb{P}(\gamma)$ y $T = \{c_1, \dots, c_n\}$ con $z_{k-1} \prec c_k \prec z_k \, \forall k = 1, \dots, n$, la **suma de Riemann** de f relativa a la partición $\mathcal{P}$ y al conjunto T se define como

$$S(f, \mathcal{P}, T) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(z_k - z_{k-1}).$$

- f es **integrable** en γ si $\exists J \in \mathbb{C}$ verificando: $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0$ tal que $\forall \mathcal{P} \in \mathbb{P}(\gamma)$ con $\|\mathcal{P}\| < \delta$ se cumple que $|S(f, \mathcal{P}, T) - J| < \varepsilon \quad \forall T$ asociado a $\mathcal{P}$. Se dice que J es la **integral** de f en γ y se denota $\int_\gamma f(z)dz$.

Propiedades Si γ curva suave dirigida y $f, g : \gamma \to \mathbb{C}$ integrables en γ. Se cumple:

1. $f + g$ es integrable en γ siendo $\int_\gamma (f(z) + g(z))dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\gamma g(z)dz$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, λf es integrable en γ siendo $\int_\gamma \lambda f(z)dz = \lambda \int_\gamma f(z)dz$.
3. $\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$.

Objetivos

- Calcular $\int_\gamma f(z)dz$ si f integrable en γ.
- Extender la definición de función integrable a funciones sobre contornos.

Cálculo de $\int_\gamma f(z)dz$

Si $\gamma \subset \mathbb{C}$ curva suave y f continua en γ, se tiene:

i) Si $\gamma = [a, b] \subset \mathbb{R}$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R} \Longrightarrow \int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(t)dt$.

ii) Si $\gamma = [a, b] \subset \mathbb{R}$ y $f(t) = u(t) + iv(t)$, donde v no es la función nula, entonces

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt$$

Regla de Barrow: Si $\gamma = [a, b]$ y $F = U + iV : \gamma \to \mathbb{C}$ es derivable con derivada continua $F'(t) = f(t)$, entonces $\int_\gamma f(z)dz = F(b) - F(a)$.

Ejemplo 5. Cálculo de la integral $\int_0^\pi e^{it}dt$.

iii) Caso general: $\gamma \subset \mathbb{C}$ curva suave dirigida.

Proposición 2. Si γ es una curva suave dirigida y $f : \gamma \to \mathbb{C}$ continua, entonces f es integrable en γ y, si $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ es p.a. de γ, se verifica

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt.$$

Corolario 2.1 Sean γ una curva suave dirigida y $f : \gamma \to \mathbb{C}$ una función continua.

$$\left.\begin{array}{l} z : [a, b] \to \mathbb{C} \text{ p.a. de } \gamma \\ w : [c, d] \to \mathbb{C} \text{ p.a. de } \gamma \end{array}\right\} \Longrightarrow \int_a^b f(z(t))z'(t)dt = \int_c^d f(w(t))w'(t)dt$$

Ejemplo 6. $\int_\gamma (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } n = -1 \\ 0 & \text{si } n \neq -1 \end{cases}$, donde $n \in \mathbb{Z}$ y $\gamma = C(z_0, R)$ es la circunferencia de centro $z_0 \in \mathbb{C}$ y radio $R > 0$ positivamente orientada.

2.2 Integral de funciones sobre contornos

Definición Una función f es **continua a trozos** sobre un contorno $\Gamma \subset \mathbb{C}$ si $\Gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_p$ tal que γ_k es una curva suave dirigida y $f|_{\gamma_k}$ es continua en γ_k, $\forall k = 1, \dots, p$, salvo quizás en los extremos de γ_k, en los cuales tiene límite finito.

Definición. Sean $\Gamma \subset \mathbb{C}$ contorno y $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ una función continua a trozos. La **integral de f en Γ**, que se denota $\int_\Gamma f(z)dz$, se define:
Si $\Gamma = \{z_0\}$, $\int_\Gamma f(z)dz = 0$.
Si $\Gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$, donde $\forall k = 1, \ldots, n$ se tiene que γ_k es una curva suave dirigida y $f|_{\gamma_k}$ es continua en γ_k salvo quizás en los extremos de γ_k donde tiene límite,

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f_1(z)dz + \cdots \int_{\gamma_n} f_n(z)dz.$$

donde $f_k = f|_{\gamma_k}$, $\forall k = 1, \ldots, n$, salvo quizás en los extremos de γ_k en los que f_k es la extensión continua de $f|_{\gamma_k}$.

Observación:

1. f_k continua en $\gamma_k \Longrightarrow \exists \int_{\gamma_k} f_k(z)dz \ \forall k = 1, .., n$ y queda garantizada la existencia de la integral de f sobre Γ.
2. Si $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ parametrización de Γ siendo $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \in \mathbb{P}([a, b])$ tal que $z|_{[t_{k-1}, t_k]}$ p.a. de γ_k

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(z(t))z'(t)dt = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt.$$

Ejemplo 7. Cálculo de la integral $\int_\Gamma (z - z_0)^n dz$, donde $n \in \mathbb{Z}$ y Γ es $C(z_0, R)$ recorrida dos veces en sentido horario (negativo).

Propiedades de la integral de contorno

Sea $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un contorno y sean $f, g : \Gamma \to \mathbb{C}$ funciones continuas a trozos. Se verifica:

1. $\int_\Gamma f(z)dz$ no depende de la parametrización de Γ. Además, si Γ es un contorno cerrado tampoco depende de la elección del origen.
2. (Linealidad) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ se cumple
$$\int_\Gamma (\lambda f(z) + \mu g(z))dz = \lambda \int_\Gamma f(z)dz + \mu \int_\Gamma g(z)dz.$$
3. (Aditividad) $\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz$.
4. $\int_{-\Gamma} f(z)dz = -\int_\Gamma f(z)dz$.
5. $\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \leq \sup_{z\in\Gamma} |f(z)| \cdot L(\Gamma)$, donde $L(\Gamma) = \int_a^b |z'(t)|dt$ con $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ parametrización de Γ (longitud del recorrido de Γ). Si Γ es simple, $L(\Gamma) = Long(\Gamma)$. Si f es continua sobre Γ el supremo de la fórmula es un máximo.

2.3 Independencia del camino. Teorema fundamental del Cálculo

En general, $\int_\Gamma f(z)dz$ no depende solamente de los extremos sino también del contorno. P. ej., si $\Gamma_1 = [0, 1] + [1, 1 + i]$ y $\Gamma_2 = [0, 1 + i]$ resulta $\int_{\Gamma_1} \bar{z}dz = 1 + i \neq \int_{\Gamma_2} \bar{z}dz = 1$

Definición. Dada una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$, donde $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un dominio, se dice que $F : \Omega \to \mathbb{C}$ es una **primitiva** de f en Ω si F es derivable y $F'(z) = f(z) \ \forall z \in \Omega$.

Teorema (Regla de Barrow). Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ dominio y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua. Si F es una primitiva de f en Ω, entonces $\forall \Gamma \subset \Omega$ contorno con origen z_I y extremo z_F se cumple

$$\int_\Gamma f(z)dz = F(z_F) - F(z_I)$$

Ejemplo 8. Cálculo de las siguientes integrales:

a) $\int_\Gamma \operatorname{sen}^2 z \cos z dz$, donde Γ es un contorno con origen $z_I = \pi$ y extremo $z_F = i$.

b) $\int_\Gamma z^{1/2}dz$, donde $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 3 \wedge \operatorname{Im} z \geq 0\}$ con origen $z_I = 3$ y extremo $z_F = -3$ y $z^{1/2}$ indica la rama principal de la raíz.

Teorema (Independencia del camino y existencia de primitiva: TFC). Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ dominio y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua. Son equivalentes:

i) f tiene primitiva en Ω.

ii) $\int_\Gamma f(z)dz = 0 \ \forall \Gamma \subset \Omega$ contorno cerrado.

iii) $\int_\Gamma f(z)dz$ no depende del contorno $\Gamma \subset \Omega$ sólo de sus extremos.

Ejemplo 9.

a) Si $z_0 \in \mathbb{C}$ y $\Gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ contorno cerrado $\Longrightarrow \int_\Gamma (z-z_0)^n dz = 0 \; \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$.

b) Sea $\Gamma \subset \mathbb{C}$ contorno con origen $z_I = -ia$ y extremo $z_F = ib$, siendo $a, b > 0$. Se cumple: $\displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{z} dz = \begin{cases} \ln(b/a) + i\pi & \text{si } \Gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\} \\ \ln(b/a) - i\pi & \text{si } \Gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \end{cases}$

c) Dada $f(z) = \dfrac{1}{z - z_0}$, se tiene:

- No existe primitiva de f en $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ pues $\int_{C(z_0,R)} f(z) dz \overset{\text{Ejemplo 6}}{=} 2\pi i \neq 0$.
- $\int_\Gamma f(z) dz$ es independiente del camino en $\Omega_{\alpha, z_0} = \mathbb{C} \setminus \{z_0 + re^{i\alpha} : r \geq 0\}$, pues $F_\alpha(z) = \log_\alpha(z - z_0)$ es una primitiva de f en Ω_{α,z_0}. En particular, $F(z) = \operatorname{Log}(z - z_0)$ es primitiva de f en $\mathbb{C} \setminus \{z_0 + x : x \leq 0\}$.

3. El teorema integral de Cauchy y sus consecuencias

3.1 El teorema integral de Cauchy (TIC)

Teorema integral de Cauchy. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ dominio simplemente conexo y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que f' es continua. Se verifica

$$\int_\Gamma f(z) dz = 0 \; \forall \Gamma \subset \Omega \text{ contorno simple y cerrado}$$

Se demuestra teniendo en cuenta:

- Relación entre integral curvilínea de campos vectoriales reales e integral de contorno compleja: Sean $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un contorno y $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ una parametrización de Γ. Si $f = u + iv : \Gamma \to \mathbb{C}$ es una función continua a trozos y $z = x + iy$, se cumple
$$\int_\Gamma f(z) dz = \int_\Gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i \int_\Gamma v(x,y)dx + u(x,y)dy$$
- Teorema de Green-Riemann: Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\bar{F} = (P, Q) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ tal que $\bar{F} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$; si $\Gamma \subset \Omega$ contorno simple, cerrado y positivamente orientado, entonces
$$\int_\Gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_{\operatorname{Int}(\Gamma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dxdy$$

Teorema integral de Cauchy (versión general para dominios simplemente conexos). Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ dominio simplemente conexo y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ entonces

$$\int_\Gamma f(z) dz = 0 \; \forall \Gamma \subset \Omega \text{ contorno cerrado.}$$

Corolario Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ dominio simplemente conexo y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces f tiene primitiva en Ω y la integral de contorno de f es independiente del contorno en Ω.

Ejemplo 10.

a) Si $\Gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$, donde γ_k es la circunferencia unidad $\forall k = 1, \ldots, n$, entonces $\int_\Gamma \frac{e^z}{z^2+4} dz = 0$, independientemente de la orientación de γ_k.

b) $\int_\Gamma (\operatorname{Log} z)^2 dz = \pi - 2 + i(2 - \pi^2/4)$, donde Γ es el segmento con origen $z_I = 1$ y extremo $z_F = i$.

Teorema integral de Cauchy (para dominios múltiplemente conexos). Sean $\Gamma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ contornos simples cerrados, con la misma orientación y verificando:

i) $\Gamma_k \subset \operatorname{Int}(\Gamma) \; \forall K = 1, \ldots, n$.

ii) $\overline{\operatorname{Int}(\Gamma_j)} \cap \overline{\operatorname{Int}(\Gamma_k)} = \emptyset \; \forall j, k \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $j \neq k$.

Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ donde $\Omega \subset \mathbb{C}$ dominio tal que $\overline{\operatorname{Int}(\Gamma)} \setminus (\cup_{k=1}^n \operatorname{Int}(\Gamma_j)) \subset \Omega$, entonces

$$\int_\Gamma f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} f(z) dz.$$

Corolario. Sean $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{C}$ contornos simples, cerrados y con la misma orientación. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, donde Ω es un dominio tal que $\overline{\text{Int}(\Gamma_1) \setminus \text{Int}(\Gamma_2)} \subset \Omega$, entonces

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz.$$

Ejemplo 11.

a) Sea $\Gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ contorno simple y cerrado. Se cumple

$$\int_\Gamma \frac{1}{z-z_0}dz = \begin{cases} 0 & \text{si } z_0 \notin \text{Int}(\Gamma) \\ 2\pi i & \text{si } z_0 \in \text{Int}(\Gamma) \text{ y } \Gamma \text{ positivamente orientado} \\ -2\pi i & \text{si } z_0 \in \text{Int}(\Gamma) \text{ y } \Gamma \text{ negativamente orientado} \end{cases}$$

b) $\int_\Gamma \frac{1}{z^2+1}dz = 0$, donde $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ positivamente orientado.

c) Sean $\Gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$, donde γ_k es una curva suave cerrada y positivamente orientada $\forall k = 1, \dots, n$, y $z_0 \in \text{Int}(\gamma_k)$ $\forall k = 1, \dots, n$. Entonces

$$\int_\Gamma \frac{1}{z-z_0}dz = n \cdot 2\pi i$$

Definición. Si Γ contorno cerrado y $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, el **índice de Γ en z_0** es $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{z-z_0}dz$.

3.2 La fórmula integral de Cauchy (FIC)

Teorema (Fórmula integral de Cauchy). Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ dominio simplemente conexo y $\Gamma \subset \Omega$ contorno simple, cerrado y positivamente orientado. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $z_0 \in \text{Int}(\Gamma)$, se verifica

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

Ejemplo 12.

a) $\int_\Gamma \frac{3z-2}{z^2-z}dz = 6\pi i$, donde $\Gamma = \left\{x + iy : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\right\}$ es positivamente orientado.

b) Resolución de los apartados (e) y (h) del ejercicio 7, hoja 5.

Lema. Si f es continua en un contorno Γ, entonces

$$\forall w \in \mathbb{C} \setminus \Gamma \quad \exists \frac{d}{dw}\left(\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-w)^n}dz\right) = n\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}dz.$$

Corolario (de FIC+lema). Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ dominio y $f = u + iv \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces

1. Existe $f^{(n)}$ en Ω $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. Existen las derivadas parciales de todos los órdenes de u y v en Ω.

Observación: El apartado 1 del corolario no es cierto en el caso real. Por ejemplo, $f(x) = x^{5/3}$ es derivable en $\mathbb{R}$ siendo $f'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3}$, pero $\nexists f''(0)$.

Teorema (Fórmula integral de Cauchy generalizada). Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ dominio simplemente conexo y $\Gamma \subset \Omega$ contorno simple, cerrado y positivamente orientado. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $z_0 \in \text{Int}(\Gamma)$, se verifica

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz.$$

Ejemplo 13. Resolución de los apartados (b),(c),(d),(f),(g) e (i) del ejercicio 7, hoja 5.

Teorema de Morera. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ dominio y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua. Si $\int_\Gamma f(z)dz = 0$ $\forall \Gamma \subset \Omega$ contorno cerrado, entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Teorema de Liouville. Si f es una función entera con módulo acotado en $\mathbb{C}$, entonces f es constante en $\mathbb{C}$.

Teorema fundamental del Álgebra. Todo polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$ tiene exactamente n ceros, contando su multiplicidad, en $\mathbb{C}$.

Teorema del valor medio de Gauss. Sean $z_0 \in \mathbb{C}$ y $R > 0$. Si $f \in \mathcal{H}(\bar{D}(z_0, R))$, entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + Re^{it}\right) dt.$$

Teorema: Principio del módulo máximo.

- (Versión para discos) Sean $z_0 \in \mathbb{C}$ y $R > 0$. Si $f \in \mathcal{H}(D(z_0, R))$ y $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ $\forall z \in D(z_0, R)$, entonces f es constante en $D(z_0, R)$.
- (Versión general) Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es una función tal que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $|f|$ alcanza su valor máximo en un punto de Ω, entonces f es constante en Ω.

Corolario Sea f una función no constante holomorfa en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{C}$ y continua en la frontera de Ω, entonces $|f|$ alcanza su valor máximo en algún punto de $\mathrm{Fr}(\Omega)$.